

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1958 - 001

Een randwaardeprobleem

A.H.M. Levelt



1958

Een randwaardeprobleem

A.H.M. Levelt

Gevraagd wordt de oplossing op het interval $[0, R]$ van de differentiaalvergelijking

$$(1) \quad r^2 w''''(r) + r w''(r) - (1 - Br^2) w'(r) = Cr^3$$

(B en C zijn niet-negatieve constanten), die voldoet aan

$$(2) \quad w(R) = 0, \quad w'(0) = w'(R) = 0.$$

Verder wordt gevraagd

$$I = \int_0^R r w(r) dr,$$

waarin $w(r)$ de oplossing van het randwaardeprobleem is.

Oplossing. Door de substitutie

$$(3) \quad w'(r) = u(r\sqrt{B}) + \frac{C}{B} r$$

gaat (1) over in

$$(4) \quad r^2 B u''(r\sqrt{B}) + r\sqrt{B} u'(r\sqrt{B}) - (1 - Br^2) u(r\sqrt{B}) = 0.$$

We stellen $r\sqrt{B} = x$. Dan gaat (4) over in

$$(5) \quad u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) u(x) = 0.$$

De voorwaarden (2) gaan over in

$$(6) \quad u(0) = 0, \quad u(R\sqrt{B}) + \frac{CR}{B} = 0.$$

(5) is een differentiaalvergelijking van Bessel met als onafhankelijke oplossingen $J_1(x)$ en $Y_1(x)$ (zie voor deze en overige genoemde eigenschappen der Besselfuncties: Whittaker and Watson, A course of modern analysis, 4th edition, chapter XVII).

Daar $Y_1(0) \neq 0$ en $J_1(0) = 0$ is, volgt dat

$$(7) \quad u(x) = - \frac{CR J_1(x)}{B J_1(R\sqrt{B})}$$

de enige oplossing van (5) is die aan (6) voldoet. Daar $J_0'(x) = -J_1(x)$ volgt uit (7) en (3) dat

$$w(r) = \frac{CR J_0(r\sqrt{B})}{B^{3/2} J_1(R\sqrt{B})} + \frac{1}{2} \frac{C}{B} r^2 + \alpha,$$

waarin α nog zo bepaald moet worden, dat voldaan is aan $w(R) = 0$ (zie (2)).

De oplossing van het randwaardeprobleem is dus

$$(8) \quad w(r) = \frac{CR}{B^{3/2} J_1(R\sqrt{B})} \{J_0(r\sqrt{B}) - J_0(R\sqrt{B})\} + \frac{1}{2} \frac{C}{B} (r^2 - R^2).$$

Nu berekenen we nog de integraal I.

Uit (8) vinden we

$$I = \frac{CR}{B^{3/2} J_1(R\sqrt{B})} \int_0^R r J_0(r\sqrt{B}) dr - \frac{CR J_0(R\sqrt{B})}{B^{3/2} J_1(R\sqrt{B})} \int_0^R r dr$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{C}{B} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr$$

$$(9) \quad I = \frac{CR^2}{B^2} - \frac{1}{2} \frac{CR^3 J_0(R\sqrt{B})}{B^{3/2} J_1(R\sqrt{B})} - \frac{1}{8} \frac{CR^4}{B}.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de relatie

$$\frac{d}{dx} (x J_1(x)) = x J_0(x).$$

Tenslotte volgen nog benaderende formules voor I als $R\sqrt{B}$ klein.

Als $|x| < 1$ is, geldt

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 + f(x)x^6 \text{ met } |f(x)| < \frac{1}{1000},$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} x^3 + \frac{1}{384} x^5 + g(x)x^7 \text{ met } |g(x)| < \frac{1}{10.000}.$$

Hieruit volgt voor $|x| < 1$

$$\frac{J_0(x)}{J_1(x)} = \frac{2}{x} \left(1 - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{192} x^4 + h(x) x^6 \right),$$

waarin $|h(x)| < \frac{1}{500}$.

Voor $R\sqrt{B} < 1$ volgt hieruit en uit (9)

$$(10) \quad I = \frac{1}{192} CR^6 \left\{ 1 + R^2 B k(R\sqrt{B}) \right\},$$

waarin $|k(R\sqrt{B})| < \frac{1}{2}$.